自己相似集合とタルスキーの不動点 : 自己参照系とフラクタル

AUTHOR(S):

林, 晋

数理解析研究所講究録
614巻 1987年 63-80

自己相似集合とタルスキーの不動点

-自己参照系とフラクタル-

京都大学数理解析研究所

林 晋 (Susumu Hayashi)

フラクタルの形式的定義はハウスドルフ次元によって与えられるが、その哲学的思想に重点をおいて言えば、フラクタルとは「何らかの同一視の眼鏡で、部分が全体と同じ構造を持つ対象」と定義してよいだろう。例えば、コッホの雪片曲線やシェルピンスキーのヤジリ等の自己相似的集合は、「相似性」という眼鏡で、全体が一部分と同一視できる様な集合である。相似性と言う眼鏡で二つの集合が同一視されるとは、(広義の)縮小写像で一方が他方に変換される事であるので、自己相似的集合とは $X = F1(X) \cup \ldots \cup Fn(X)$ という形の適当な等式を満たすような集合である。この等式を集合 X が、F1,...,Fn という縮小写像達によって X から作られた集合達 F1(X),...,Fn(X)によって「定義されている」と読むと計算機言語でお馴染の帰納的定義の定義方程式と見なすことができる。本稿では、帰納的プログラムの不動点意味論に使われる CPO の概念により、この見方に数学的な基礎づけを与え、さらに、適当な自己参照系においてはフラクタルがカントール・ラッセルの対角線論法によって作りだされるというヴァレラとソト-アンドラデ(F.J.Varela & J. Soto-Andrade) の発想を基礎づける。

1. タルスキーの不動点定理

タルスキーの不動点定理は、完備半順序上の連続関数に関する定理で、計算機言語に数学的意味を与えるプログラム意味論において、帰納的に定義されたプログラムに意味を与える為に使われる。本節では、このタルスキーの不動点定理と、そのプログラム意味論への応用を簡単に解説する。まず、完備半順序 CPO の定義から始めよう。

定義 1. ある集合 Dと、その上の半順序の対 $(D, \sqsubseteq)$ が完全半順序(COMPLETE PARTIAL ORDER)であるとは、次の二条件が成り立つ事である。

(1) D は最小元 $\perp$ を持つ。
(2) 任意の有向集合 X も、その最小上界 $\bigsqcup X$ を持つ。
(本稿では、有向集合は空でないと仮定する。)

以下、完全半順序を CPO と略記する。

定義 2. D1 と D2 が、CPO であるとき、関数 $f: D1 \to D2$ が連続であるとは、任意の有向集合 X に対し

$$\bigsqcup f(X) = f(\bigsqcup X)$$

が成立することである。また、f が単調(MONOTONE)とは、

$$x \sqsubseteq y \rightarrow f(x) \sqsubseteq f(y)$$

と成る事である。

$x \sqsubseteq y$ であれば、$\bigsqcup(x,y) = y$。よって、$\bigsqcup(f(x),f(y)) = f(\bigsqcup(x,y)) = f(y)$。従って、$f(x) \sqsubseteq f(y)$。即ち、f が連続であれば、f は必ず単調である。また、n 変数の関数 $f(x1,...,xn)$ が連続であるとは、各変数に対し連続であることを言う。

f が D から D への関数であるとき、$x = f(x)$ となる x を f の不動点と言う。一般には、不動点は存在しても、一意に定まるとは限らない。不動点の内で、順序 $\sqsubseteq$ について最小の物を、最小不動点と言う。

定理 0 (タルスキーの不動点定理). D を CPO、f を D から D への連続関数とせよ。この時、f の最小不動点が $\bigsqcup f^n(\perp)$ によって与えられる。

証明は次のごとく、至って簡単である。まず、$\perp$ は最小元だから、$\perp \sqsubseteq f(\perp)$ となる。f は、単調なので

$$\perp \sqsubseteq f(\perp) \sqsubseteq f^2(\perp) \sqsubseteq \ldots$$

となる。但し、f^n は、fをn個合成して出来る関数である。この鎖は、有向集合だから $\bigsqcup f^n(\perp)$ が存在する。また、$f(\perp)$ から始まる鎖の最小上界は、この鎖の最小上界と一致する。従って、f の連続性より

$$\bigsqcup f^n(\perp) = \bigsqcup f(f^n(\perp))$$

$$= f(\bigsqcup f^n(\perp))$$

となり $\bigsqcup f^n(\perp)$は、fの不動点である。また、x が f の不動点であれば、$\perp \sqsubseteq x$ より

$$f^n(\perp) \sqsubseteq f^n(x)$$

しかし、右辺は x に等しいので、$\bigsqcup f^n(\perp) \sqsubseteq x$。即ち、$\bigsqcup f^n(\perp)$は最小の不動点である。

CPO とタルスキーの不動点定理が、プログラム意味論に於て、どの様に利用されるか解説しよう。プログラム意味論には、多くの立場があるが、大別すると操作的意味論、公理的意味論、表示的意味論の三つの立場に分類される。CPO を用いるプログラム意味論は、この内、表示的意味論(DENOTATIONAL SEMANTICS)と呼ばれるもので、「スコット・ストレーチーの理論」とも呼ばれる。表示的意味論は、データやプログラ

ムを、適当な CPO の元として解釈する。即ち、表示的意味論とは、計算機言語において使われる「表現」に、適当な CPO 上で、その値を定義する方法を与える事である。整数や真理値などの、離散的データは、最小元を付け加えて、平坦領域(FLAT DOMAIN) と呼ばれる CPO と見なす。

整数　　.... -2 -1 0 1 2 ....

$\perp_Z$

真理値　　TRUE FALSE

$\perp_B$

平坦領域の最小元　は、「未定義」を表わすと考える。即ち、$\perp_Z$ は、整数を表わすべき表現で値を持たない物の「値」であり、$\perp_B$ は、真理値を表わすべき表現で値を持たない物の「値」である。この様な、未定義を表わす値の導入は、部分関数(PARTIAL FUNCTION)を，通常の関数(TOTAL FUNCTION)と、見なせるという利点を持つ。数学では、関数は、常にその定義域と込みにして、考えるので、関数は、入力に対し、常に出力を持つと考えて差し支えない。しかし、プログラム言語では、関数は抽象的な対応ではなく、具体的な表現(プログラム)を持っているので、どこまでが定義域であるかは、必ずしも明白ではない。即ち、プログラマーがプログラム P の「定義域」、即ち、プログラマーが意図した入力の範囲を、D と指定しても P は、D に属さない入力に対しても、停止して意味のある値を出力する可能性がある。また、P が停止する入力の集合 T を、P の定義域と考えると、通常、T は、極めて複雑な集合となり、数学で考えるような、簡単な集合としての定義域とは、掛け離れた物になってしまう。

この様な事情から、計算機の世界では、値が定義されていない表現を認め、関数の代わりに部分関数を使用する。未定義元の導入は、部分関数を再び関数と見なす事を許す。例えば、

f(x) = if p(x) then q(x) else r(x)

と定義されたプログラムの値 $[\![f(x)]\!]$ は、p(x)、q(x)、r(x) の値から、次の様に定義される。

$$[\![f(x)]\!] = \begin{cases} [\![q(x)]\!] & \text{if} \quad [\![p(x)]\!] = \text{true} \\ [\![r(x)]\!] & \text{if} \quad [\![p(x)]\!] = \text{false} \\ \perp & \text{if} \quad [\![p(x)]\!] = \perp_B \\ \text{error} & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで、error は、エラーを表わす特殊な値である。

離散的データ型を CPO と見なすと、データ型からデータ型への連続関数の空間を CPO と見なす事が出来る。計算機の世界では関数(プログラム)もデータの一種と見なすことが多いので、関数の空間が、通常の離散的データ型と同格の CPO であるという事は、大変都合が良い。また、離散的データ型 D 、E がある時、その平坦領域 $D_\perp$ 、$E_\perp$ を考えると D から E への任意関数 f に対し

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq \perp_D \\ \perp_E & x = \perp_D \end{cases}$$

と定義された f は連続となる。従って、連続関数のみを考えれば、通常の関数はすべて含まれる。まら、条件文、繰り返し文等の、プログラム構成子(PROGRAM CONSTRUCT)に関して、連続関数の空間は閉じている事が知られている。これらの事から、計算可能な関数のみを考えるプログラム意味では、任意関数ではなく、連続関数のみを考えれば十分である。D1 から D2 への連続関数の空間を、[D1 → D2] と書く。この時、[D1 → D2] 上の順序は、次の様に定義される。

$$f \sqsubseteq g \quad \text{iff} \quad f(x) \sqsubseteq g(x) \quad (\text{for all } x \quad D1)$$

この空間の底は、どの様な入力に対しても値が底である様な関数である。この底は、平坦領域の底とは異なり、「未定義」を表わすのではない事を注意しておこう。(この底の多義的性格は、スコット理論の欠点である。この問題を解決する為、プロトキンは、部分関数に基づくスコット理論を構築している。)

これ等の、CPO を用いて、タルスキーの不動点定理が、どの様に帰納的プログラムに、意味を与えるかを概説しよう。以下、関数型プログラムのみを考えるとして、プログラムと関数を同一視する。帰納的プログラムとは、次の様な帰納的定義方程式によって定義されるプログラムの事である。

(E1) $\quad f(x) = \Phi(f, x)$

左辺の f は、定義されるべき関数であって、右辺は f を、使って条件文等のプログラム構成子によって作られた表現である。例えば、階乗を計算するプログラムは次の様に定義される。

(F1) $\quad f(x) = \text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } x*f(x-1)$

この様な等式を満たす関数は、一般的には一意で無く数多く存在する。実際のプログラム言語の処理系は、この定義方程式の解の内で $\sqsubseteq$ の順序で、最も小さい解を計算する。即ち、g が定義方程式を満たすとき、必ず $f \sqsubseteq g$ となる様な解 f が実際に計算される関数なのである。

この「最小解」を、タルスキーの最小不動点として実現する為に、

ラムダ記法という関数の記述法を導入する。e が D2 の元を記述する表現で、x が D1 の元を表わす変数であるとき、表現 $\lambda x.e$ は、D1 から D2 への関数で x に e の値を対応させるものを表わす。従って、ラムダ記法を用いれば (E1) は、

(E2) $\qquad f = \lambda x.\Phi(f,x)$

と書くことが出来る。

$\Phi(f,x)$ の f が、連続関数の空間 F 上を走る変数であるとすると (E2) の右辺は、f,x に連続に依存する。従って、ラムダ表現 $\lambda x.\Phi(f,x)$ は、f に連続に依存する。この表現に f 以外のパラメーターが、現われないとすると、これは、F から F への連続関数を表わす。そして、(E2) を満たす連続関数の全体は丁度 $\lambda f.\lambda x.\Phi(f,x)$ の不動点の集合となり、最小解は、その最小不動点、即ち、タルスキーの不動点となる。この様にして、帰納的プログラムに、最小不動点として意味を与える方法を、最小不動点意味論という。

2. タルスキー不動点としてのフラクタル達

本節では、コッホ曲線、シェルピンスキーのヤジリ等の、自己相似集合が、タルスキーの不動点になる事を示す。これ等の集合が、不動点として実現される空間は、空でないコンパクト集合がなす CPO である。

定義 3. M をコンパクト・ハウスドルフ空間とする。M の CPO とは、

$D(M) = (A \mid A$ は空でない閉集合$)$,

$X \sqsubseteq Y \quad \text{iff} \quad X \supseteq Y \quad (X,\ Y \in D(M))$

である。

容易に判るように、ハウスドルフ空間 M の D(M) が CPO である条件は、M がコンパクトであることである。この様にして作られる CPO D(M) を、空間性CPO (SPATIAL CPO)と言う。D(M) の底と極限は

$$\perp = M,$$

$$\bigsqcup X = \bigcap X$$

となる。D(M) の任意の部分集合は、最大下界 $\overline{\bigcup X}$ を持つ。D(M) の n 個の元 $X_1,\ldots,X_n$ の最大下界 $X_1 \sqcap \ldots \sqcap X_n$ を n 変数関数と見なすと、これは連続関数となる。

CPO には、スコット位相という位相が入り、順序による連続性と同じ連続性を定義する事が知られているが、この位相はハウスドルフで

はない。しかし、空間性 CPO には、有限位相と呼ばれる自然なコンパクト・ハウスドルフ位相が入る。有限位相とは、次の様な開集合の基によって生成されるトポロジーである。

$$B(U1,\ldots,Un) = (K \mid K \subseteq \bigcup Ui,\ \forall i. Ui \cap K \neq \phi)$$

但し、U1,...,Un は M の開集合である。

空間性 CPO 上には、この様に、二つの自然な連続性が定義される。この二つを区別する為に、次の様な用語を用いよう。

T-連続性とは、有限位相の意味での連続性、
O-連続性とは、CPO の意味での連続性。

この時、次の補題が成り立つ。

補題. D(M) の任意の有向集合 X は、有限位相の意味で収束する。

証明. X を D(M) の有向集合とすると、X と X 上の恒等関数を考えれば、D(M) を位相空間と考えた時、その上のネットと考えられる。 X を含む、開集合の基 B(U1,...,Un) を考えると、定義より

$$(\bigcup Ui)^c \subseteq \bigcup (K^c \mid K \in X)$$

$(\bigcup Ui)^c$ は、コンパクトだから、X の元 K1,...,Kn があって

$$\bigcup Ui \supseteq K1 \cap \ldots \cap Kn$$

X は有向集合だから、ある X の元が K で $K \subseteq K1 \cap \ldots \cap Kn$ となる物がある。K は B(U1,...,Un) の元。従って、ネット X は $\bigsqcup X$ に収束する。

系. D を空間性 CPO とせよ。f が D から D への単調な T-連続関数である時、fは、O-連続である。

証明. X を D の有向集合とすると、f が単調なので f(X) も有向集合。よって、$\bigsqcup f(X)$ が、存在するが $\bigsqcup X, \bigsqcup f(X)$ は、それぞれ、有限位相の意味で X, f(X)の極限であるから、f の T-連続性より $f(\bigsqcup X) = \bigsqcup f(X)$。

この系の逆は、一般には成り立たない。例えば、次のような、場合分けによる関数は、O-連続だが T-連続ではない。

$$f(X) = \begin{cases} M & a \in X \\ (a) & \text{otherwise} \end{cases}$$

但し、a は集積点であるとする。後に、より数学的に自然な例を与える。

連続性は、空間 M から 空間 D(M) へ遺伝する。即ち、 F が M から M への連続関数であれば、M がハウスドルフ・コンパクトなので X が、D(M) の元ならば F(X) もそうである。よって、

$$F^*(X) = F(X)$$

と、定義すれば、 D(M) から D(M) への連続関数 F^*が定義される。有限位相の定義より、 F は T-連続である。また、F^*は単調だから、0-連続でもある。このことから、次の事実が証明できる。

定理 1. M をコンパクト・ハウスドルフ空間とし、F1,...,Fn を、M から M への連続関数とする。その時、次の集合方程式は、最大解を持つ。

$$X = F1(X) \cup \ldots \cup Fn(X) \qquad (X \subseteq M)$$

さらに、最大解は、空でないコンパクト集合である。

証明. M は、コンパクトであるから、任意の X に対して、 $\overline{Fi(X)} = Fi(\overline{X})$ となる。よって、 D(M) の方程式

$$x = F1^*(x) \cap \ldots \cap Fn^*(x)$$

の最小解が求めるべき最大解である。

ユークリッド空間上の自己相似集合は、この定理が、存在を主張する最大解となる。例えば、コッホ曲線は、M を原点を中心とする単位球とし、

$$F1(x) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F2(x) = \begin{pmatrix} 1/6 & -3/6 \\ 3/6 & 1/6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1/6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F3(x) = \begin{pmatrix} 1/6 & 3/6 \\ -3/6 & 1/6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F4(x) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

としたときの最大解である。

この最大解は、タルスキーの不動点だから、次の様な近似列の極限(共通部分)である。

$$M \supseteq F(M) \supseteq F^2(M) \supseteq \ldots \supseteq \bigcap F^n(M) = 最大解$$

M が円である事を利用して、円を描くルーチンを帰納的に呼びだすことにより、この近似列を、コンピュータで描くことができる。(付録として、Apple LaserWriter で描いた近似列と、BASIC で書かれた、プログラムを付けておいた。)

定理 1 は、ハッチンソン[Hu]と畑[Ht]による次の定理の CPO 版と考えられる。

定理 2. M を完備距離空間とせよ。F1,...,Fn を、M から M への縮小写像とすると、次の方程式を満たす空でないコンパクト集合が、丁度一つ存在する。

$$X = F1(X) \cup \ldots \cup Fn(X)$$

この定理は、M の空でないコンパクト集合が、ハウスドルフ距離によって、完備距離空間になり、対応 $X \longmapsto F1(X) \cup \ldots \cup Fn(X)$ が、その距離により、再び縮小写像となる事を利用すれば、バナッハの不動点定理の帰結である。この定理を、我々の定理と比較すると次の様になる。

	ハッチンソン・畑の定理	我々の定理
空間	完備距離空間	完備半順序 (CPO)
関数	縮小写像	連続関数
不動点	バナッハ	タルスキー

M をユークリッド空間とすると、一意性を除き定理 2 は定理 1 の系となる事を示そう。(一意性についても CPO の範囲で、十分条件を与えることができるが、省略する。[Hy]を参照せよ。) F1,...,Fn を、ユークリッド空間の縮小写像とする。Fi のリプシッツ定数を Li 、不動点を Pi とする。また、 P1 と Pi の距離を Di とする。$0 \leqq Li < 1$ であるから、ある正定数 E があって、

$$Li*(E+Di)+Di < E \quad (i=1,\ldots,n)$$

となる。M を、中心 P1 、半径 E を持つ球とすると、$Fi(M) \subseteq M$ である。よって、定理 1 を、この M と F1,...,Fn に適用すれば定理 2 の存在の部分が証明される。次の様な集合方程式は、右辺がハウスドルフ距離で、連続でないので、距離空間によるアプローチでは、一般的枠組に入らない。

$$X = F1(X \cap A1) \cup F2(X \cap A2),$$

$$F1(s) = 1+b*(s-a),\ F2(s) = b*(s-a) \quad (0<a<1,\ 0<b<1),$$

A1 = [0,a], A2 = [a,1]

1

b*(1-a)

1-a*b

0 a 1

ところが、この右辺は CPO の意味で連続になる。一般に、次の様な定理 1 の拡張を、タルスキーの不動点定理から導ける。

定理 3. M をコンパクト・ハウスドルフ空間、A1,...,An を、空でないコンパクト集合で M の被覆となるものとする。また、 Fi (i=1,...,n) を、Ai から S への連続関数とする。この時、次の集合方程式は、最大解を持つ。

$$X = F1(X \cap A1) \cup \ldots \cup Fn(X \cap An)$$

関数 $\phi_\alpha(z) = z^n - \alpha$ (n=2,3,...) のジュリア集合 J(α) ("filled-in" Julia set) も、タルスキーの不動点と考える事が出来る。ジュリア集合は、

$$J(\alpha) = (z \mid \lim \phi_\alpha{}^n(z) \neq \infty)$$

と定義されるが、M を複素平面上の球 B(0, | α | +1) とし、$F(X) = \phi_\alpha(X)$ とすると、F は、 D(M) の上の連続関数となり、J(α) は、そのタルスキーの不動点になる。解析関数 $\phi_\alpha(z)$ の、逆関数の枝を考えれば、J(α) は、定理 3 の例でもある。

また、u, v を複素変数とし

$$M = ((u,v) \mid |u| < |v| + 1,\ |v| \leqq 2),$$

$$f(u,v) = (u^2+v, v)$$

$$F = f^{-1}$$

とすると F は連続となり、そのタルスキーの不動点を A とすれば、u 軸に沿う断面 (u | (u,α)∈A) は、ジュリア集合 J(α) 、v 軸に沿う断面 (α | (0,α)∈A) は、マンデルブローー集合となる。また、A ⊂ C×[-1/4,2] は、マンデルブローの "draped sculpture" ([M] 図187) となる。

3．対角線論法とフラクタル

本節では、前節の結果を利用しカントール・ラッセル・カリーの対角線論法によるフラクタルの記述という、ヴァレラとソト-アンドラデのアイデア[SV]を、数学的に基礎づける。

まず、ラッセルの矛盾の復習から始めよう。集合 a を、その特徴関数

$$a(x) = \begin{cases} \mathrm{true} & x \in a \\ \mathrm{false} & x \notin a \end{cases}$$

と同一視すれば $x \in a$ は$a(x)$と考えられる。また、内包記法

$$\{x \mid R(x)\}$$

は、述語 $R(x)$ をその真理値を表わす表現と考えれば、前出のラムダ記法を使って、 $\lambda x.R(x)$ と表記できる。従って、否定 ¬ を真理値から真理値への関数と考えれば、ラッセルの集合 $R = \{a \mid \neg a \in a\}$ は、$\lambda xa.(\neg a(a))$ と言う関数と考えられる。この関数を r とすると $r(r)$ が否定の不動点となる。すなわち

$$r(r) = (\lambda a.(\neg a(a)))r = \neg r(r)$$

これがパラドックスである唯一の理由は、否定は 真、偽の二値を交換する関数なので、不動点を持たない筈なのに $r(r)$ が、不動点になってしまう事にある。これを、逆に考えれば、ラッセルの対角線論法は、単に素朴集合論の矛盾を与える方法では無く、関数の不動点を求める一般的な方法で、それを不動点の無いような関数の存在する領域に適用した(適用できると考えた)為に矛盾が生じたといえる。従って、否定の様な不動点のない関数が存在しない領域では、ラッセルの対角線論法は、悪しき病ではなく、関数の不動点を与える有用な武器なのである。カリー(H.B.CURRY) は、この点に着目し、彼の結合子論理(COMBINATORY LOGIC)において、任意の結合子(関数)に不動点を与えるカリーの矛盾結合子と呼ばれる方法を考案した。これを、結合子論理とほぼ等価なチャーチ(A. CHURCH)のラムダ計算(LAMBDA CALCULUS [B]参照)の言葉で説明しよう。

集合論が「物の集まり」を基礎に置いているのに対し、ラムダ計算は「関数」に基礎を置く。集合論では、すべてが集合であるのに対し、ラムダ計算では全てが関数である。a,b,c...を「任意」の関数を表わす変数としよう。これをラムダ変数と呼ぶ。この時、ラムダ式とは次の様に定義される表現である。

1. ラムダ変数はラムダ式。
2. e1, e2がラムダ式ならば、e1(e2)はラムダ式である。
3. e がラムダ式で、a がラムダ変数ならば、$\lambda a.e$ は

ラムダ式である。

e1(e2)を適用(APPLICATION)と呼び、λa.e を抽象 (ABSTRACTION)と呼ぶ。適用 e1(e2) は、e1 を関数と見なし、それに入力 e2 を与えたときの値を表わす。抽象 λa.e は、第一節で説明したと同様に

$$a \longmapsto e$$

と言う対応を与える関数を表現する。従って、ベータ変換

(*) $(\lambda a.e1)(e2) \rightarrow e1[e2/a]$

が成り立つ。(e1[e2/a] は、e1 の a に e2 を代入した物を表わす。)

このベータ変換を計算のワンステップと見なし、ラムダ式の体系をラムダ計算(LAMBDA CALCULUS)と呼ぶ。二つの式 e1 と e2 がベータ変換の矢印の鎖で結び付けられる時、e1 と e2 は、ベータ収束すると言って e1 = e2 と書く。この一見極めて単純な体系の中で。自然数、リスト、木などの多くのデータ・タイプが表現されかつ、それらの上での「計算可能関数」が全てラムダ式で表現出来ることが知られている。(正確には、「計算可能関数=ラムダ式で表現可能な関数」と言うチャーチの主張が、色々な経験的事実によって実証され、広く受け入れられていると言うべきであろう。)

この体系でカリーがどのように不動点を求めたかラッセルの矛盾と対比させて説明しよう。左の欄が、ラッセルの推論、右の欄がカリーの推論である。

ラッセル	カリー
a を集合を表わす変数とせよ。	a をラムダ変数とせよ。
$a \in a$ は命題である。	a(a)はラムダ式である。
¬は論理演算子である。	f を別のラムダ変数とせよ。
$\neg a \in a$ は命題である。	f(a(a)) はラムダ式である。
$R = (a \mid \neg a \in a)$は集合である。	$\omega = \lambda a.f(a(a))$はラムダ式である。
$R \in R$は命題である。	$\omega(\omega)$はラムダ式である。
$a \in (x \mid P) = P[a/x]$だから	ベータ変換により
$R \in R = \neg R \in R$	$\omega(\omega) = f(\omega(\omega))$
矛盾	$\omega(\omega)$は f の不動点

$\omega(\omega)$ の f をさらに抽象した

$$Y = \lambda f.(\lambda a.f(a(a))(\lambda a.f(a(a))))$$

をカリーの矛盾結合子あるいは単に Y 結合子という。定義より

$$Y(f) = f(Y(f))$$

であり Y は不動点を計算する関数である。

カリーの論法で最も重要なステップは、a(a) 及び $\omega(\omega)$ のようにあるラムダ式が自分自身に適用された様なラムダ式を考える所にある。この様な適用を自己適用(SELF APPLICATION)と呼び、自己適用が可能な系を自己参照系(SELF REFERENTIAL DOMAIN) と言う。即ち、自己参照系ではカリーの対角線論法により不動点が存在する。ラムダ計算は自己参照系であるが、ラムダ式は単なる表現であって、その様な表現により記述されるべき「数学的実体」としての自己参照系が存在するか否かは、別の問題と言うことができる。この問題に答えを与えたのがスコット(DANA SCOTT)の著名なD 構成(D -CONSTRUCTION)である。1969年、スコットはラムダ計算が単なる表現と計算規則から成り立っている事に数学的不完全性を感じ、ラムダ計算の「数学的モデル」を構築し、ラムダ計算ひいてはラムダ計算に基礎を置くストレイチー(C. STRACHEY)のプログラム意味論の数学化に成功した。これがD 無限構成である。歴史的経緯やD 無限構成の詳細は他の文献に譲り([B],[S])、ここでは、スコットの構成法から自己参照系の存在のみを定理として述べるに留める。

定理 (スコット). D を任意の CPO とせよ。この時、CPO の圏のダイアグラムで次の様な物が存在する。

$$D \underset{j}{\overset{i}{\rightleftarrows}} D_\infty \simeq [D_\infty \to D_\infty] \qquad j \circ i = id,\ i \circ j \sqsubseteq id$$

D_∞ は、その上の関数の空間 $[D_\infty \to D_\infty]$ と同型なのでラムダ変数が D_∞ の元を表わすと考えれば、ラムダ式は D_∞ の元とも $[D_\infty \to D_\infty]$ の元とも考えられ、e(e)という自己適用は、左の e を $[D_\infty \to D_\infty]$ の元、右の e を D_∞ の元と解釈した時の通常の世界の関数適用と考えられる。この様にして、ラムダ式に D_∞ の元として値を与える事ができる。このスコットの定理のポイントは D_∞ から D_∞ への全ての関数を考えるのではなく連続関数のみを考える所にある。全ての関数を考えれば、その空間の濃度は、 D_∞ の濃度が 1 より大きい限り、D_∞ そのものの濃度より大きいのだから。また、 D_∞ は CPO であるから、その連続関数はタルスキーの定理からも不動点を持つ事が判り、不動点を持つ関数のみを考えるという基本方針に一致する。

実は、このタルスキーの定理による最小不動点が、カリーの対角線論法による不動点と一致する事がパーク(D. PARK)によって示されている。この事実により D から D への連続関数 f の不動点を、D_∞ の矛盾結合子で導く事ができる。即ち、 $\hat{f} = i \circ f \circ j$ とすると、$j(\perp_{D_\infty}) = \perp_D$

より

$$j \circ \hat{f}^n(\bot_{D_\infty}) = f^n \circ j(\bot_{D_\infty})$$
$$= f^n(\bot_D)$$

よって、パークの結果より

$$\bigsqcup f^n(\bot_D) = j(\bigsqcup \hat{f}^n(\bot_{D_\infty}))$$
$$= j(Y(\hat{f}))$$

左辺は CPO の極限を用いたタルスキーの不動点であり、右辺は極限の概念を全く用いない対角線論法による不動点である。D として第二節の空間性 CPO を考えれば、第二節のフラクタル達は、D での対角線論法により記述されたこととなる。

以上がヴァレラとソト-アンドラデによるフラクタルと対角線論法を関連づける試みの数学化である。筆者は、この事実に、どのような数学的意味が潜んでいるのか判断しかねている。実際、この様な考察から、何か有用な数学的結論を引き出せたわけではない。あるいは、単に駄洒落の様な物なのかもしれない。しかし、ラッセルの矛盾に初めて出合った時に感じた、堂々巡りを繰り返しながら、論理の深い渦の中に引き込まれて行くような感情と、フラクタル達を眺める時に感じる、無限遠点に引き込まれて行く様な、不思議な感情に、奇妙な共通性がある事も確かである。ヴァレラ達の考察から、何時の日か、自然と論理の神秘の水底をのぞく事ができる事を期待しつつ、この小論を終りたい。

> だが、もしかして、奇跡的にたもたれていた指標に、そこから光明がほとばしりでるような指標に、行きあたることはないだろうか。いっさいが可能でないとすれば、すべてが可能だといってもいいのだ。私たちが手探りでそのなかを進んでいく夜は、あまりにも暗く、この夜について、私たちはなにもあえて断定することができない。この夜が、まだつづくように定められているということさえも....。
>
> レヴィ=ストロース「悲しき熱帯」より

文献

[B] Barentregt, H.P.: The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics, North-Holland, Amsterdam, 1981

[Hu] Hutchinson, J.E.: Fractals and Self-similarity, Indiana Univ. Math. J., 30, pp.713-747, 1981

[Ht] Hata, M.: On Some Properties of Set-dynamical Systems, Proc. Japan Acad., 61, Ser. A., pp.99-102, 1985

[Hy] Hayashi, S.: Self-similar Sets as Tarski's Fixed Points, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 21, pp.1059-1066, 1985

[M] Mandelbrot, B.B.: The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francsisco, 1982

[S] Scott, D.: Logic and Programming Languages; CACM, 20, 1977

[SV] Soto-Andrade, J. & Varela, F.J.: Self-Reference and Fixed Points: A Discussion and an Extension of Lawvere's Theorem, Acta Applicandae Mathematicae, 2, pp.1-1V9, 1984.

付録 タルスキーの不動点としてのコッホ曲線

付録 1.

次のリストは、コッホ曲線が、本文中で述べた四つの関数によって、円から生成される様子を描くプログラムである。これは、数理解析研・桜川貴司君が書いた C プログラムを、数理解析研・中野浩君が、BASIC に移植した物である。このプログラムを走らせると、最初の円の半径と、表示する近似の深さを聞いてくる。深さは、何度も聞いて来るので、表示したい深さを、数の小さい方から順にいれる。深さを聞いてきたときに、改行のみを入力すると絵を描き始める。例えば、半径を 1 、深さを 1, 2 とした時は、次の様になる。

```
Radious? 1
Depth? 1
Depth? 2
Depth?
  実行開始
```

狭義の自己相似集合の場合、CPO の底は、ユークリッド空間の単位球と考えて良いので、プログラム中の、関数達の集合を変えるだけで、色々な自己相似集合を描く事ができる。

```
10 'Initialize
20     DIM K(20).SN(100).SR(100).SX(100).SY(100).DEPTH(100)
30     PI=3.14159263#:CO60=COS(PI/3):SI60=SIN(PI/3)
50 'Input request
60     INPUT"Radius";RAD
70     FOR I=1 TO 100
80             INPUT"Depth";DEPTH(I):IF DEPTH(I)<=0 THEN 100
90     NEXT I
100    READ SON
110    FOR I=1 TO SON
120            X=0:Y=0
130            ON I GOSUB 1100,1200,1300,1400,1500.1600.1700,1800
140            X0=X1:Y0=Y1:X=1:Y=0
150            ON I GOSUB 1100.1200.1300,1400,1500.1600.1700,1800
160            K(I)=SQR((X1-X0)*(X1-X0)+(Y1-Y0)*(Y1-Y0))
170    NEXT I
200 'Begin drawing
210    CONSOLE .,0:SCREEN 3,1:WINDOW(-1.61,-1.01)-(1.61.1.01):CLS 3
220    COLOR=(0.0):COLOR=(1.1):COLOR=(2.6):COLOR=(3.3)
230    COLOR=(4.5):COLOR=(5,2):COLOR=(6.4):COLOR=(7.7)
300 'Main Loop
310    FOR I=1 TO 100
320            IF DEPTH(I)<=0 THEN 380
330            COL=I MOD 6+1:DEP=DEPTH(I)
340            'Call Root
350                    SP=0:D=1:R=RAD:X=0:Y=0
360                    GOTO  500
370    NEXT I
380 END
400 'Draw circle
410    CIRCLE(X,-Y),R.7
420    PAINT(X,-Y),COL,7
430    CIRCLE(X.-Y),R,COL
440    IF D=1 THEN 370 ELSE 580
500 'Recursion
510    IF D=DEP THEN 400
520    'Call Sons
530            SN(SP)=1
540                    ON SN(SP) GOSUB 1100,1200,1300.1400,1500,1600,1700,1800
550                    SR(SP)=R:SX(SP)=X:SY(SP)=Y
560                    D=D+1:R=R*K(SN(SP)):X=X1:Y=Y1:SP=SP+1
570                    GOTO 500
580                    D=D-1:SP=SP-1:R=SR(SP):X=SX(SP):Y=SY(SP)
590            IF SN(SP)<SON THEN SN(SP)=SN(SP)+1:GOTO 540
600    IF D=1 THEN 370 ELSE 580
1000 'Son
1010   DATA 4
1100 'T1
1110   X1=X/3-2/3:Y1=Y/3
1120   RETURN
1200 'T2
1210   X1=X/3+2/3:Y1=Y/3
1220   RETURN
1300 'T3
1310   X1=X/3*CO60-Y/3*SI60-1/6:Y1=Y/3*CO60+X/3*SI60+1.7320508#/6
1320   RETURN
1400 'T4
1410   X1=X/3*CO60+Y/3*SI60+1/6:Y1=Y/3*CO60-X/3*SI60+1.7320508#/6
1420   RETURN
```

付録 2.

次の図は、コッホ曲線を、本文中で述べた四つの関数を使って、深さ 5 迄、近似した物である。この図は、京都大学・松田元彦君が書いた PostScript 言語のプログラムで、Apple LaserWriter を使用して描いた。使われたアルゴリズムは、付録 1 のアルゴリズムと同じである。